

Y Becws Mathemategol Mawr

Cyd-ddigwyddiad yn unig yw unrhyw debygrwydd i bobl, byw neu marw, neu amserlenni.

1. Ynglŷn â chorff sy'n oeri, datgana Deddf Oeri Newton bod cyfradd newid tymheredd y corff mewn cyfrannedd union â'r gwahaniaeth rhwng tymheredd y corff a thymheredd yr amgylchoedd.

Am ddeg munud i chwech ar nos Iau oer ym mis Chwefror, mae'r Heddlu'n cyrraedd lleoliad llofruddiaeth erchyll yn Llyfrgell y Gwyddorau Ffisegol, lle mae'r system gynhesu fwyaf modern yn cadw'r tymheredd yn 20°C yn gyson. Mae corff y person marw wedi dioddef anafiadau difrifol i'w ben, ac mae'n ymddangos ei fod wedi cael ei daro â darn o bibell blwm a ddarganfuwyd gerllaw. Am 18:00 yn union, mesurir tymheredd yr ymadawedig a'i ceir yn 25.0°C . Hanner awr yn ddiweddarach, ailfesurir y tymheredd a cheir iddo ostwng i 23.3°C . Mae gohebydd o'r Cambrian News yna, sy'n gwneud sylw bod hwn yn is o lawer na thymheredd arferol corff (37.0°C). Mae'n dod i'r casgliad felly bod 'rhaid i'r corff fod wedi gorwedd yna am amser hir', er bod myfyriwr gweithgar a adawodd y llyfrgell ychydig cyn 15:00 yn dweud i'r dioddefwr fod yn fyw bryd hynny.

Ar ôl cyfres hir o gyfweiliadau, a gynhwysodd ddatganiad gan Dr Pitchford nad y fo oedd y llofruddiwr, gan iddo dreulio'r holl brynhawn yn gostwng matrices 73×94 i ffurf echelon trwy ddefnyddio dull dileu Gauss-Jordan, dim ond y tri canlynol, a nhw i gyd ag adwyau yn eu halibïau, sydd ar ôl ar restr pobl ddrwgdybiedig yr Heddlu:

- Roedd y Dr Vellender yn rhoi darlith Hafaliadau Differol (MT11210) o 16:00 i 17:00, a darlith Ystadegaeth Cymhwysol (MA26620) o 17:00 i 18:00, ond does ganddo ddim alibi cyn 16:00.
 - Roedd yr Athro Cox yn rhoi darlith Modelau Fathemategol o Systemau Biolegol (MA34810) yn ddi-baid o 15:00 i 17:00, heb saib o unrhyw fath yn y canol. Mae'n aneglur lle roedd e ar ôl 17:00.
 - Roedd y Dr Douglas yn rhoi darlith Integru Lebesgue (MA37010) o 15:00 i 16:00, ac roedd mewn ei ddsbarth Zumba wythnosol o 17:00 i 18:00. Yn yr awr ryngol, wnaeth neb mo'i weld.
- (a) Ysgrifennwch hafaliad differol ar gyfer tymheredd y corff T (fel ffwythiant o amser t), ynghyd ag amod cychwynnol.
 - (b) Defnyddiwch ddull addas i ddarganfod y datrysiad neilltuol echblyg i'r hafaliad differol hwn.
 - (c) Darganfyddwch yr amser marwolaeth tebygol, ac felly darganfyddwch hunaniaeth y darlithiwr llofruddiog.

2. Mae defnyn o olew gyda màs 0.2 g yn llonydd cyn disgyn dan ddisgyrchiant mewn awyr. Mae'r llusgiad ar y defnyn yn 1.6×10^{-3} Newton pan mae ei gyflymder yn 0.4 m/s. Gan dybio fod y llusgiad yn gyfraneddol i'r cyflymder o'r defnyn a mai 9.8m/s^2 yw'r cyflymiad disgyrchol darganfyddwch:
- y cyflymder ar amser t eiliad;
 - y pellter ar ôl t eiliad; a'r
 - cyflymder terfannol.
3. Gadewch i Q fod swm y carbon-14 sydd mewn rhyw sylwedd ar amser t a gadewch i Q_0 fod y swm gwreiddiol. Tybiwch fod y swm o garbon-14 yn ymddatod ar gyfradd sy'n gyfraneddol i'r swm o garbon-14 sy'n bresenol ar y pryd, a hanner-oes carbon-14 yw 5,730 blwyddyn.
- Darganfyddwch fynegiad i Q fel ffwythiant o amser t trwy ddatrys hafaliad differol priodol sy'n modelu ymddatodiad carbon-14. [Dangoswch pob cyfrifiad i ennill credyd llawn.]
 - Mae gweddillion arbennig yn cael eu darganfod gyda swm cyfredol o garbon-14 sydd yn 20% o'r swm gwreiddiol. Darganfyddwch oedran y gweddillion.
4. Mae poblogaeth o locustiaid mewn rhanbarth pendant yn cynyddu ar gyfradd sy'n gyfrannol â maint y boblogaeth cyfredol. Mewn absenoldeb o unrhyw ffactor arall mae'r poblogaeth yn dyblu pob wythnos. I ddechrau mae'r rhanbarth yn cynnwys 500,000 o locustiaid. Bwytir 50,000 o locustiaid y diwrnod gan ysglafaethwyr fel adar a chnoflod.
- Darganfyddwch boblogaeth y locustiaid ar unrhyw adeg.
 - A yw'r boblogaeth yn marw allan yn y pen draw? Os yw, darganfyddwch yr amser mae'n gymryd.
 - Beth yw'r nifer lleiaf o locustiaid a fysai angen eu bwyta pob diwrnod i sicrhau bod y boblogaeth yn marw allan yn y pen draw.
5. Mae'r canlynol yn fodel rhesymol ar gyfer tyfiant poblogaeth mewn amgylchedd ag adnoddau cyfyngedig:
- $$\frac{dp}{dt} = kp\left(1 - \frac{p}{K}\right)$$
- i ryw gysonion positif k a K , lle mae p yn dynodi'r maint o'r boblogaeth a K yw'r cynhwysedd cario, hynny yw, maint mwyaf posib y boblogaeth.
- Brasluniwch y maes cyfeiriad sy'n gysylltiedig â'r hafaliad yma.
 - Nodwch y ddau ddatrysiad ewcilibriwm a labelwch hwy ar y maes cyfeiriad.
 - Trwy ystyried eich braslun o'r maes cyfeiriad, disgrifiwch sut all y boblogaeth newid dros amser. [Awgrymiadau: ysytriwch yr achosion pan mae maint cychwynol y boblogaeth yn un o'r datrysiadau ewcilibriwm a phan mae'n is na neu'n fwy na ddatrysiad ewcilibriwm. Sut mae'r datrysiadau yn bihafio yn agos i ddatrysiad ewcilibriwm?]
 - Datrysych yr hafaliad differol, o wybod mai maint cychwynol y boblogaeth yw p_0 .

- (e) Tybiwch fod $k = \frac{1}{2}$ a bod y boblogaeth cychwynol yn 1,000. Os ar ôl 2 flynedd mae'r boblogaeth yn 500, a fydd y boblogaeth yn gostwng i sero? Os nad yw, darganfyddwch y gwerth mae'r boblogaeth yn tueddu ato.
6. Crynodiad clorin mewn pwll nofio 600,000 ℓ yw 0.98 mg/ ℓ , sy'n is na'r lefel lleiaf sy'n ddiogel, sef 1 mg/ ℓ . Er mwyn sicrhau bod y pwll yn ddiogel i'w ddefnyddio, mae cymysgedd o 2 mg/ ℓ o glorin mewn ddŵr yn cael ei bwmpio i mewn i'r pwll ar gyfradd o 20 ℓ y munud, ac mae'r cymysgedd yn y pwll yn cael ei bwmpio allan ar yr un gyfradd. Tybiwch fod y clorin yn cymysgu'n syth gyda'r ddŵr.
- (a) Ysgrifennwch haflriad differol sy'n modelu'r maint o glorin, q dywed, yn y pwll ar amser t .
- (b) Darganfyddwch fynegiad i q fel ffwythiant o t .
- (c) Pa mor hir y mae e'n gymryd cyn i'r pwll fod yn ddiogel i'w ddefnyddio?
- (d) Gan dybio bod y system yn cario ymlaen fel y disgrifir uchod, darganfyddwch y maint mwyaf posib o glorin sydd yn y pwll ar unrhyw adeg.
- (e) Y crynodiad mwyaf sydd yn ddiogel yw 3 mg o glorin mewn un litr o ddŵr. Oes yna unrhyw beryg o'r crynodiad fod yn fwy na'r macsiwm yma?