MT11210 Hafaliadau Differol – Taflen Ymarfer 3 – Datrysiadau

1a∗) Mae datrysiad cyffredinol $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 12y = 24x^2$ ar ffurf

$$y(x) = \text{Ffwythiant Cyflenwol} + \text{Integryn Neilltuol}$$

I ddarganfod y Ffwythiant Cyflenwol, y_c, yn gyntaf rydym yn datrys yr hafaliad ategol:

$$m^2 + m - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 = -4,\ m_2 = 3.$$

Gan fod gwreiddiau yr hafaliad yn rhifau real gwahanadwy, y Ffwythiant Cyflenwol yw:

$$y_c = Ae^{-4x} + Be^{3x}.$$

lle mae A a B yn gysonion mympwyol. [3]

Gan fod y term fforsio yn fonomial o radd 2, rydym yn ceisio'r ffwythiant canlynol i bennu yr Integryn Neilltuol:

$$y_n(x) = a + bx + cx^2, \text{ fel bod } \frac{dy_n}{dx} = b + 2cx \text{ a } \frac{d^2y_n}{dx^2} = 2c.$$

Mae amnewid hwn i mewn i'r hafaliad differol yn peri:

$$\begin{aligned} 2c + (b + 2cx) - 12(a + bx + cx^2) &= 24x^2 \\ \Rightarrow -12a + b + 2c + (-12b + 2c)x - 12cx^2 &= 24x^2 \end{aligned}$$

Cymharu cyfernodau:

$$\begin{array}{rlcl} x^2\,) & -12c = 24 & \Rightarrow & c = -2 \\ x\,) & -12b + 2c = 0 & \Rightarrow & b = -\frac{1}{3} \\ 1\,) & -12a + b + 2c = 0 & \Rightarrow & a = -\frac{13}{36} \end{array}$$

Felly, mae $-\frac{13}{36} - \frac{x}{3} - 2x^2$ yn Integryn Neilltuol, a'r datrysiad cyffredinol yw

$$\boxed{y(x) = Ae^{-4x} + Be^{3x} - 2x^2 - \frac{x}{3} - \frac{13}{36}}$$

[3]

1b) Mae datrysiad cyffredinol $\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 9y = 2e^{-x}$ ar ffurf

$$y(x) = \text{Ffwythiant Cyflenwol} + \text{Integryn Neilltuol}$$

I ddarganfod y Ffwythiant Cyflenwol, y_c, yn gyntaf rydym yn datrys yr hafaliad ategol:

$$m^2 + 6m + 9 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = -3$$

Gan fod gwreiddiau yr hafaliad ategol yn hafal, y Ffwythiant Cyflenwol yw:

$$y_c = (A + Bx)e^{-3x}$$

lle mae A a B yn gysonion mympwyol.

Gan fod y term fforsio yn ffwythiant esbonyddol, rydym yn ceisio'r ffwythiant canlynol i bennu yr Integryn Neilltuol:

$$y_n(x) = ae^{-x}, \text{ fel bod } \frac{dy_n}{dx} = -ae^{-x} \text{ a } \frac{d^2y_n}{dx^2} = ae^{-x}.$$

Mae amnewid hwn i mewn i'r hafaliad differol yn peri:

$$\begin{aligned} ae^{-x} - 6ae^{-x} + 9ae^{-x} &= 2e^{-x} \\ \Rightarrow 4ae^{-x} = 2e^{-x} \end{aligned}$$

Felly, $a = \frac{1}{2}$ ac mae $\frac{1}{2}e^{-x}$ yn Integryn Neilltuol. Felly, y datrysiad cyffredinol yw

$$\boxed{y(x) = (A + Bx)e^{-3x} + \frac{1}{2}e^{-x}}$$

1c∗) Mae datrysiad cyffredinol $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 10\sin 3x$ ar ffurf

$$y(x) = \text{Ffwythiant Cyflenwol} + \text{Integryn Neilltuol}$$

I ddarganfod y Ffwythiant Cyflenwol, y_c, yn gyntaf rydym yn datrys yr hafaliad ategol:

$$m^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 = -2i, \; m_2 = 2i$$

Gan fod y gwreiddiau yn gyfiau cymhlyg, y Ffwythiant Cyflenwol yw:

$$y_c = A\cos 2x + B\sin 2x$$

lle mae A a B yn gysonion mympwyol. [2]

Gan fod y term fforsio yn ffwythiant trigonometrig, rydym yn ceisio'r ffwythiant canlynol i bennu yr Integryn Neilltuol: $y_n(x) = a\cos 3x + b\sin 3x$, fel bod

$$\frac{dy_n}{dx} = -3a\sin 3x + 3b\cos 3x \text{ a } \frac{d^2y_n}{dx^2} = -9a\cos 3x - 9b\sin 3x.$$

Mae amnewid hwn i mewn i'r hafaliad differol yn peri:

$$\begin{aligned} -9a\cos 3x - 9b\sin 3x + 4(a\cos 3x + b\sin 3x) &= 10\sin 3x \\ \Rightarrow -5a\cos 3x - 5b\sin 3x &= 10\sin 3x \end{aligned}$$

Cymharu cyfernodau:

$$\begin{aligned} \cos 3x)\quad -5a = 0 \quad &\Rightarrow \quad a = 0 \\ \sin 3x)\quad -5b = 10 \quad &\Rightarrow \quad b = -2 \end{aligned}$$

Felly, mae $-2\sin 3x$ yn Integryn Neilltuol, a'r datrysiad cyffredinol yw

$$\boxed{y(x) = A\cos 2x + B\sin 2x - 2\sin 3x}$$

[3]

1d) Mae datrysiad cyffredinol $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 9y = 9\sin 3x$ ar ffurf

$$y(x) = \text{Ffwythiant Cyflenwol} + \text{Integryn Neilltuol}$$

I ddarganfod y Ffwythiant Cyflenwol, y_c, yn gyntaf rydym yn datrys yr hafaliad ategol:

$$m^2 + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 = -3i,\ m_2 = 3i$$

Gan fod y gwreiddiau yn gyfiau cymhlyg, y Ffwythiant Cyflenwol yw:

$$y_c = A\cos 3x + B\sin 3x$$

lle mae A a B yn gysonion mympwyol.

Gan fod y ffwythiant rhagbrofol arferol ($a\cos 3x + b\sin 3x$) sy'n cyfateb i'r term fforsio yn gallu cael ei ddiddwytho o'r Ffwythiant Cyflenwol (trwy roi $A = a$ a $B = b$), rydym yn ceisio'r ffwythiant canlynol i bennu'r Integryn Neilltuol: $y_n(x) = x(a\cos 3x + b\sin 3x)$, fel bod

$$\frac{dy_n}{dx} = (a + 3bx)\cos 3x + (b - 3ax)\sin 3x \text{ a } \frac{d^2y_n}{dx^2} = (6b - 9ax)\cos 3x - (6a + 9bx)\sin 3x.$$

Mae amnewid hwn i mewn i'r hafaliad differol yn peri:

$$\begin{aligned}(6b - 9ax)\cos 3x - (6a + 9bx)\sin 3x + 9(ax\cos 3x + bx\sin 3x) &= 9\sin 3x\\ \Rightarrow 6b\cos 3x - 6a\sin 3x &= 9\sin 3x\end{aligned}$$

Cymharu cyfernodau:

$$\begin{array}{lll}\cos 3x\,) & 6b = 0 & \Rightarrow \quad b = 0\\ \sin 3x\,) & -6a = 9 & \Rightarrow \quad a = -\frac{3}{2}\end{array}$$

Felly, mae $-\frac{3}{2}x\cos 3x$ yn Integryn Neilltuol, a'r datrysiad cyffredinol yw

$$\boxed{y(x) = A\cos 3x + B\sin 3x - \frac{3}{2}x\cos 3x}$$

1e*) Mae datrysiad cyffredinol $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 6\dfrac{dy}{dx} + 9y = 10e^{3x}$ ar ffurf

$$y(x) = \text{Ffwythiant Cyflenwol} + \text{Integryn Neilltuol}.$$

I ddarganfod y Ffwythiant Cyflenwol, y_c, yn gyntaf rydym yn datrys yr hafaliad ategol:

$$m^2 - 6m + 9 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = 3.$$

Gan fod gwreiddiau'r hafaliad ategol yn hafal, y Ffwythiant Cyflenwol yw:

$$y_c = (A + Bx)e^{3x}$$

lle mae A a B yn gysonion mympwyol. [3]

Gan fod y ffwythiant rhagbrofol arferol (ae^{3x}) sy'n cyfateb i'r term fforsio yn gallu cael ei ddiddwytho o'r Ffwythiant Cyflenwol (trwy roi $A = a$ a $B = 0$) (NB: mae xe^{x} yn gallu cael ei

ddiddwytho o'r Ffwythiant Cyflenwol hefyd), rydym yn ceisio'r ffwythiant canlynol i bennu'r Integryn Neilltuol: $y_n(x) = ax^2e^{3x}$, fel bod

$$\frac{dy_n}{dx} = ae^{3x}(3x^2 + 2x) \text{ a } \frac{d^2y_n}{dx^2} = ae^{3x}(9x^2 + 12x + 2).$$

Mae amnewid hwn i mewn i'r hafaliad differol yn peri:

$$\begin{aligned} ae^{3x}(9x^2 + 12x + 2 - 18x^2 - 12x + 9x^2) &= 10e^{3x} \\ \Rightarrow 2ae^{3x} &= 10e^{3x} \end{aligned}$$

Felly, $a = 5$ ac mae $5x^2e^{3x}$ yn Integryn Neilltuol. Felly, y datrysiad cyffredinol yw

$$\boxed{y(x) = (A + Bx)e^{3x} + 5x^2e^{3x}}$$

[5]

2a) Yn gyntaf rydym yn darganfod datrysiad cyffredinol $y'' + 5y' + 6y = 30\cos t$, sydd ar ffurf

$$y(t) = \text{Ffwythiant Cyflenwol} + \text{Integryn Neilltuol}$$

I ddarganfod y Ffwythiant Cyflenwol, y_c, yn gyntaf rydym yn datrys yr hafaliad ategol:

$$m^2 + 5m + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 = -3,\ m_2 = -2$$

Gan fod y gwreiddiau yn real ac yn wahanol, y Ffwythiant Cyflenwol yw:

$$y_c = Ae^{-3t} + Be^{-2t}$$

lle mae A a B yn gysonion mympwyol.

Gan fod y term fforsio yn lluosrif o ffwythiant trigonometrig, rydym yn ceisio'r ffwythiant canlynol i bennu'r Integryn Neilltuol: $y_n(t) = a\cos t + b\sin t$, fel bod

$$y_n'(t) = -a\sin t + b\cos t \text{ a } y_n''(t) = -a\cos t - b\sin t$$

ar gyfer rhyw gysonion a a b i'w pennu. Mae amnewid hwn i mewn i'r hafaliad differol yn peri:

$$\begin{aligned} -a\cos t - b\sin t + 5(-a\sin t + b\cos t) + 6(a\cos t + b\sin t) &= 30\cos t \\ \Rightarrow (5a + 5b)\cos t + (5b - 5a)\sin t &= 30\cos t \end{aligned}$$

Cymharu cyfernodau:

$$\begin{array}{ll} \cos t) & 5a + 5b = 30 \\ \sin t) & 5b - 5a = 0 \end{array}$$

Mae datrys yr hafaliadau gydamserol yma yn peri $a = 3$ a $b = 3$. Felly, mae $3\cos t + 3\sin t$ yn Integryn Neilltuol a'r datrysiad cyffredinol yw

$$\boxed{y(t) = Ae^{-3t} + Be^{-2t} + 3\cos t + 3\sin t}$$

Fel ein bod yn gallu defnyddio'r amod cychwynnol $y'(0) = -1$, mae'n rhaid inni ddifferu'r datrysiad cyffredinol yn gyntaf i gael:

$$y'(t) = -3Ae^{-3t} - 2Be^{-2t} - 3\sin t + 3\cos t.$$

Felly, trwy ddefnyddio'r amodau cychwynnol rydym yn gweld bod

$$\begin{aligned} 4 &= y(0) = A + B + 3 \Rightarrow A + B = 1 \\ -1 &= y'(0) = -3A - 2B + 3 \Rightarrow 3A + 2B = 4 \end{aligned}$$

Mae datrys yr hafaliadau cydamserol uchod yn peri $A = 2$ a $B = -1$. Felly'r datrysiad penodol yw

$$\boxed{y(t) = 2e^{-3t} - e^{-2t} + 3\cos t + 3\sin t}$$

2b$*$) Yn gyntaf rydym yn darganfod datrysiad cyffredinol $y'' - 2y' + 2y = 2t + 5e^{-t}$, sydd ar ffurf

$$y(t) = \text{Ffwythiant Cyflenwol} + \text{Integryn Neilltuol}$$

I ddarganfod y Ffwythiant Cyflenwol, y_c, yn gyntaf rydym yn datrys yr hafaliad ategol:

$$m^2 - 2m + 2 = 0 \Rightarrow m_1 = 1 - i,\ m_2 = 1 + i$$

Gan fod y gwreiddiau yn gyfiau cymhlyg, y Ffwythiant Cyflenwol yw:

$$y_c = e^t(A\cos t + B\sin t)$$

lle mae A a B yn gysonion mympwyol. [2]

Gan fod y term fforsio yn swm o fonomial o radd 1 a llusorif o ffwythiant esbonyddol, rydym yn ceisio'r ffwythiant canlynol i ddarganfod yr Integryn Neilltuol:

$$y_n(t) = a + bt + ce^{-t},\ \text{fel bod } y_n'(t) = b - ce^{-t} \text{ a } y_n''(t) = ce^{-t}$$

ar gyfer rhyw gysonion a a b i'w pennu. Mae amnewid hwn i mewn i'r hafaliad differol yn peri:

$$\begin{aligned} ce^{-t} - 2(b - ce^{-t}) + 2(a + bt + ce^{-t}) &= 2t + 5e^{-t} \\ \Rightarrow 2a - 2b + 2bt + 5ce^{-t} = 2t + 5e^{-t} \end{aligned}$$

Cymharu cyfernodau:

$$\begin{array}{rlcl} e^{-t}\,) & 5c = 5 & \Rightarrow & c = 1 \\ t\,) & 2b = 2 & \Rightarrow & b = 1 \\ 1\,) & 2a - 2b = 0 & \Rightarrow & a = 1 \end{array}$$

Felly, mae $1 + t + e^{-t}$ yn Integryn Neilltuol, a'r datrysiad cyffredinol yw

$$\boxed{y(t) = e^t(A\cos t + B\sin t) + 1 + t + e^{-t}}$$

Fel ein bod yn gallu defnyddio'r amod cychwynnol $y'(0) = -1$, mae'n rhaid inni ddifferu'r datrysiad cyffredinol yn gyntaf i gael:

$$y'(t) = e^t((A + B)\cos t + (B - A)\sin t) + 1 - e^{-t}.$$

Felly, trwy ddefnyddio'r amodau cychwynnol rydym yn gweld bod

$$\begin{aligned} 0 &= y(0) = A + 2 \Rightarrow A = -2 \\ -1 &= y'(0) = A + B \Rightarrow B = 1 \end{aligned}$$

Felly, y datrysiad penodol yw

$$\boxed{y(t) = e^t(\sin t - 2\cos t) + 1 + t + e^{-t}}$$

[4]

2c) Yn gyntaf rydym yn darganfod datrysiad cyffredinol $y'' + 4y = 10e^t - 4\cos 2t$, sydd ar ffurf

$$y(t) = \text{Ffwythiant Cyflenwol} + \text{Integryn Neilltuol}$$

I ddarganfod y Ffwythiant Cyflenwol, y_c, yn gyntaf rydym yn datrys yr hafaliad ategol:

$$m^2 + 4 = 0 \Rightarrow m_1 = -2i,\ m_2 = 2i$$

Gan fod y gwreiddiau yn gyfiau cymhlyg, y Ffwythiant Cyflenwol yw:

$$y_c = A\cos 2t + B\sin 2t$$

lle mae A a B yn gysonion mympwyol.

Gan fod y ffwythiant rhagbrofol arferol $(a\cos 2t + b\sin 2t)$ sy'n cyfateb i ran o'r term fforsio yn gallu cael ei ddiddwytho o'r Ffwythiant Cyflenwol, rydym yn ceisio'r ffwythiant treial canlynol i bennu'r Integryn Neilltuol:

$$y_n(t) = at\cos 2t + bt\sin 2t + ce^t,\ \text{fel bod}$$

$y_n'(t) = (a+2bt)\cos 2t + (b-2at)\sin 2t + ce^t$ a $y_n''(t) = (4b-4at)\cos 2t - (4a+4bt)\sin 2t + ce^t$ ar gyfer rhyw gysonion a a b i'w pennu. Mae amnewid hwn i mewn i'r hafaliad differol yn peri:

$$\begin{aligned} (4b - 4at)\cos 2t - (4a + 4bt)\sin 2t + ce^t + 4(at\cos 2t + bt\sin 2t + ce^t) &= 10e^t - 4\cos 2t \\ \Rightarrow 4b\cos 2t - 4a\sin 2t + 5ce^t = 10e^t - 4\cos 2t & \end{aligned}$$

Cymharu cyfernodau:

$$\begin{aligned} \sin 2t\,) \quad & -4a = 0 && \Rightarrow && a = 0 \\ \cos 2t\,) \quad & 4b = -4 && \Rightarrow && b = -1 \\ e^t\,) \quad & 5c = 10 && \Rightarrow && c = 2 \end{aligned}$$

Felly, mae $-t\sin 2t + 2e^t$ yn Integryn Neilltuol, a'r datrysiad cyffredinol yw

$$\boxed{y(t) = A\cos 2t + B\sin 2t - t\sin 2t + 2e^t}$$

Fel ein bod yn gallu defnyddio'r amod cychwynnol $y'(0) = 6$, mae'n rhaid inni ddifferu'r datrysiad cyffredinol yn gyntaf i gael:

$$y'(t) = (2B - 2t)\cos 2t - (2A + 1)\sin 2t + 2e^t.$$

Felly, trwy ddefnyddio'r amodau cychwynnol rydym yn gweld bod

$$\begin{aligned} 5 &= y(0) = A + 2 \Rightarrow A = 3 \\ 6 &= y'(0) = 2B + 2 \Rightarrow B = 2 \end{aligned}$$

Felly, y datrysiad penodol yw

$$\boxed{y(t) = 3\cos 2t + 2\sin 2t - t\sin 2t + 2e^t}$$

2d$*$) Yn gyntaf rydym yn darganfod datrysiad cyffredinol $y'' + 4y' + 4y = 10 + 8t - 6te^{-2t}$, sydd ar ffurf

$$y(t) = \text{Ffwythiant Cyflenwol} + \text{Integryn Neilltuol}$$

I ddarganfod y Ffwythiant Cyflenwol, y_c, yn gyntaf rydym yn datrys yr hafaliad ategol:

$$m^2 + 4m + 4 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = -2$$

Gan fod gwreiddiau'r hafaliad ategol yn hafal, y Ffwythiant Cyflenwol yw:

$$y_c = (A + Bt)e^{-2t}$$

lle mae A a B yn gysonion mympwyol. [3]

Gan fod y ffwythiant rhagbrofol arferol ($(c + dt)e^{-2t}$) sy'n cyfateb i ran o'r term fforsio yn gallu cael ei ddiddwytho o'r Ffwythiant Cyflenwol (trwy roi $A = c$ a $B = d$), rydym yn ceisio'r ffwythiant treial canlynol i bennu'r Integryn Neilltuol:

$$y_n(t) = a + bt + t^2(c + dt)e^{-2t}, \text{ fel bod } y_n'(t) = b + (2ct + (3d - 2c)t^2 - 2dt^3)e^{-2t},$$

$$y_n''(t) = (2c + (6d - 8c)t + (4c - 12d)t^2 + 4dt^3)e^{-2t}$$

ar gyfer rhyw gysonion a, b, c a d i'w pennu. Mae amnewid hwn i mewn i'r hafaliad differol yn peri:

$$\begin{aligned} (2c + (6d - 8c)t + (4c - 12d)t^2 + 4dt^3)e^{-2t} + 4(b + (2ct + (3d - 2c)t^2 - 2dt^3)e^{-2t}) \\ + 4(a + bt + t^2(c + dt)e^{-2t}) = 10 + 8t - 6te^{-2t} \\ \Rightarrow 4a + 4b + 4bt + (2c + 6dt)e^{-2t} = 10 + 8t - 6te^{-2t} \end{aligned}$$

Cymharu cyfernodau:

$$\begin{array}{rlcl} e^{-2t}\,) & 2c = 0 & \Rightarrow & c = 0 \\ te^{-2t}\,) & 6d = -6 & \Rightarrow & d = -1 \\ t\,) & 4b = 8 & \Rightarrow & b = 2 \\ 1\,) & 4a + 4b = 10 & \Rightarrow & a = \frac{1}{2} \end{array}$$

Felly, mae $\frac{1}{2} + 2t - t^3e^{-2t}$ yn Integryn Neilltuol, a'r datrysiad cyffredinol yw

$$\boxed{y(t) = (A + Bt - t^3)e^{-2t} + \frac{1}{2} + 2t}$$

Fel ein bod yn gallu defnyddio'r amod cychwynnol $y'(0) = 1$, mae'n rhaid inni ddifferu'r datrysiad cyffredinol yn gyntaf i gael:

$$y'(t) = (B - 2A - 2Bt - 3t^2 + 2t^3)e^{-2t} + 2.$$

Felly, trwy ddefnyddio'r amodau cychwynnol rydym yn gweld bod

$$\begin{aligned} 2 &= y(0) = A + \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{3}{2} \\ 1 &= y'(0) = B - 2A + 2 \Rightarrow B = 2 \end{aligned}$$

Felly, y datrysiad penodol yw

$$\boxed{y(t) = \left(\frac{3}{2} + 2t - t^3\right) e^{-2t} + \frac{1}{2} + 2t}$$

[5]

3) Mae datrysiad cyffredinol $\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 10\sin 3x - 5e^{-x}$ ar ffurf

$$y(x) = \text{Ffwythiant Cyflenwol} + \text{Integryn Neilltuol}$$

I ddarganfod y Ffwythiant Cyflenwol, y_c, yn gyntaf rydym yn datrys yr hafaliad ategol:

$$m^3 + m^2 + 4m + 4 = 0 \Rightarrow m^2(m+1) + 4(m+1) = 0 \Rightarrow (m+1)(m^2+4) = 0$$

$$\Rightarrow m_1 = -1,\ m_2 = -2i,\ m_3 = 2i$$

Gan fod yna un gwraidd real a phâr o wreiddiau cyfiau cymhlyg, y Ffwythiant Cyflenwol yw:

$$y_c = Ae^{-x} + B\cos 2x + C\sin 2x$$

lle mae A, B a C yn gysonion mympwyol.

Gan fod y ffwythiant rhagbrofol arferol (ae^{-x}) sy'n cyfateb i'r rhan o'r term fforsio ($5e^{-x}$) yn gallu cael ei ddiddwytho o'r Ffwythiant Cyflenwol (trwy roi $A = a$), rydym yn ceisio'r ffwythiant canlynol i ddarganfod yr Integryn Neilltuol:

$$\begin{aligned} y_n(x) &= axe^{-x} + b\cos 3x + c\sin 3x, \text{ fel bod} \\ y_n'(x) &= ae^{-x}(-x+1) - 3b\sin 3x + 3c\cos 3x, \\ y_n''(x) &= ae^{-x}(x-2) - 9b\cos 3x - 9c\sin 3x \\ y_n'''(x) &= ae^{-x}(-x+3) + 27b\sin 3x - 27c\cos 3x \end{aligned}$$

Mae amnewid hwn i mewn i'r hafaliad differol yn peri:

$$\begin{aligned} &ae^{-x}(-x+3) + 27b\sin 3x - 27c\cos 3x + ae^{-x}(x-2) - 9b\cos 3x - 9c\sin 3x \\ &\quad +4(ae^{-x}(-x+1) - 3b\sin 3x + 3c\cos 3x) + 4(axe^{-x} + b\cos 3x + c\sin 3x) = 10\sin 3x - 5e^{-x} \\ &\qquad \Rightarrow 5ae^{-x} - (15c+5b)\cos 3x + (15b-5c)\sin 3x = 10\sin 3x - 5e^{-x} \end{aligned}$$

Cymharu cyfernodau:

$$\begin{array}{rlcl} e^{-x}\,) & 5a = -5 & \Rightarrow & a = -1 \\ \cos 3x\,) & -15c - 5b = 0 & \Rightarrow & b = -3c \\ \sin 3x\,) & 15b - 5c = 10 & \Rightarrow & c = -\frac{1}{5} \Rightarrow b = \frac{3}{5} \end{array}$$

Felly, mae $-xe^{-x} + \frac{3}{5}\cos 3x - \frac{1}{5}\sin 3x$ yn Integryn Neilltuol, a'r datrysiad cyffredinol yw

$$\boxed{y(x) = (A - x)e^{-x} + B\cos 2x + C\sin 2x + \frac{3}{5}\cos 3x - \frac{1}{5}\sin 3x}$$

4∗) Yn gyntaf rydym yn darganfod datrysiad cyffredinol $y^{(iv)} - 4y'' = 8e^{2x} + 24x$, sydd ar ffurf

$$y(x) = \text{Ffwythiant Cyflenwol} + \text{Integryn Neilltuol}$$

I ddarganfod y Ffwythiant Cyflenwol, y_c, yn gyntaf rydym yn datrys yr hafaliad ategol:

$$m^4 - 4m^2 = 0 \Rightarrow m^2(m^2 - 4) = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = 0,\ m_3 = -2,\ m_4 = 2$$

Gan fod yna un gwraidd wedi ei ail-adrodd ddwywaith a phâr o wreiddiau real gwahanol, y Ffwythiant Cyflenwol yw:

$$y_c = A + Bx + Ce^{2x} + De^{-2x}$$

lle mae A, B, C a D yn gysonion mympwyol.

Gan fod y ffwythiant rhagbrofol arferol $(ae^{2x} + b + cx)$ sy'n cyfateb i'r term fforsio yn gallu cael ei ddiddwytho o'r Ffwythiant Cyflenwol (trwy roi $C = a, A = b$ a $B = c$), rydym yn ceisio'r ffwythiant canlynol i ddarganfod yr Integryn Neilltuol:

$$\begin{array}{rcl} y_n(x) & = & axe^{2x} + x^2(b + cx), \\ y_n'(x) & = & ae^{2x}(2x + 1) + 2bx + 3cx^2, \\ y_n''(x) & = & ae^{2x}(4x + 4) + 2b + 6cx \\ y_n'''(x) & = & 4ae^{2x}(2x + 3) + 6c \\ y_n^{(iv)}(x) & = & 16ae^{2x}(x + 2) \end{array}$$

Mae amnewid hwn i mewn i'r hafaliad differol yn peri:

$$\begin{array}{rcl} 16ae^{2x}(x + 2) - 4(ae^{2x}(4x + 4) + 2b + 6cx) & = & 8e^{2x} + 24x \\ \Rightarrow 16ae^{2x} - 8b - 24cx & = & 8e^{2x} + 24x \end{array}$$

Cymharu cyfernodau:

$$\begin{array}{rlcl} e^{2x}\,) & 16a = 8 & \Rightarrow & a = \frac{1}{2} \\ 1\,) & -8b = 0 & \Rightarrow & b = 0 \\ x\,) & -24c = 24 & \Rightarrow & c = -1 \end{array}$$

Felly, mae $\frac{1}{2}xe^{2x} - x^3$ yn Integryn Neilltuol, a'r datrysiad cyffredinol yw

$$\boxed{y(x) = A + Bx + Ce^{2x} + De^{-2x} + \frac{1}{2}xe^{2x} - x^3}$$

Fel ein bod yn gallu defnyddio'r amod cychwynnol, mae'n rhaid inni ddifferu'r datrysiad cyffredinol yn gyntaf i gael:

$$\begin{aligned} y'(x) &= B + 2Ce^{2x} - 2De^{-2x} + \frac{1}{2}e^{2x}(2x+1) - 3x^2 \\ y''(x) &= 4Ce^{2x} + 4De^{-2x} + 2e^{2x}(x+1) - 6x \\ y'''(x) &= 8Ce^{2x} - 8De^{-2x} + 2e^{2x}(2x+3) - 6 \end{aligned}$$

Felly, trwy ddefnyddio'r amodau cychwynnol rydym yn gweld bod

$$\begin{aligned} 3 &= y(0) = A + C + D \\ 1 &= y'(0) = B + 2C - 2D + \frac{1}{2} \\ 2 &= y''(0) = 4C + 4D + 2 \\ -2 &= y'''(0) = 8C - 8D + 6 - 6 \end{aligned}$$

Mae datrys y system o hafaliadau uchod ar gyfer A, B, C a D yn peri bod $A = 3$, $B = 1$, $C = -\frac{1}{8}$, $D = \frac{1}{8}$. Felly, y datrysiad yw

$$\boxed{y(x) = 3 + x - x^3 + \frac{1}{8}(4x-1)e^{2x} + \frac{1}{8}e^{-2x}}$$

[7]