

## MT11210 Hafaliadau Differol – Taflen Ymarfer 2 – Datrysiaidau

- (a) Defnyddiwch ffactor integru (oherwydd bod yr HDC yn llinol ac ei fod yn hafaliad trefn un).
- (b) Datrysych drwy wahanu y newidynnau (oherwydd  $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ , lle  $f(x) = \frac{1}{x-3}$  a  $g(y) = y + 2$ ).
- (c) Datrysych drwy integru'n uniongyrchol (ffwythiant o ddim ond y newidyn annibynnol  $x$  yw'r ochr dde).
- (d) Mae'r HDC yn homogenaidd - bydd yr amnewidyn  $y = vx$  yn gostwng y broblem yn ffurf wahanadwy.
- (e) Defnyddiwch ffactor integru (oherwydd bod yr HDC yn llinol ac ei fod yn hafaliad trefn un).

2a) Mae angen inni ddarganfod y datrysiad o  $xy^3 \frac{dy}{dx} = x^4 + y^4$  sy'n bodloni'r amod ffin  $y(1) = 2$ .

Mae ad-drefnu'r hafliad differol yn rhoi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^4 + y^4}{xy^3}$$

Mae hwn yn hafaliad trefn un homogenaidd, felly gadawer i  $y = vx$ , sy'n ymhglygu bod  $\frac{dy}{dx} = x \frac{dv}{dx} + v$ . Mae amnewid y rhain i mewn i'r hafaliad differol yn rhoi

$$\begin{aligned} x \frac{dv}{dx} + v &= \frac{x^4(1 + v^4)}{x^4v^3} = \frac{1 + v^4}{v^3} \\ \therefore x \frac{dv}{dx} &= \frac{1 + v^4}{v^3} - v \\ &= \frac{1}{v^3} \end{aligned}$$

Mae gwahanu'r newidynnau ac integru yn rhoi

$$\begin{aligned} \int v^3 dv &= \int \frac{1}{x} dx + A \quad (A \text{ yn gysonyn mympwyol}) \\ \therefore \frac{1}{4}v^4 &= \ln|x| + A \end{aligned}$$

Amnewidwn  $v = \frac{y}{x}$  ac ad-drefnwn i gael y datrysiad cyffredinol:

$$y^4 = 4x^4(\ln|x| + A).$$

Mae'r amod ffin  $y(1) = 2$  yn rhoi  $16 = 4A \Rightarrow A = 4$ . Felly'r datrysiad neilltuol yw

$$y^4 = 4x^4(\ln|x| + 4).$$

2b) Mae angen inni ddarganfod y datrysiaid o  $x(2y + x)\frac{dy}{dx} = 3y^2 + 2xy$  sy'n bodloni'r amod ffin  $y(2) = 4$ .

Mae ad-drefnu'r hafliad differol yn rhoi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 + 2xy}{x(2y + x)}$$

Mae hwn yn hafaliad trefn un homogenaidd, felly gadawer i  $y = vx$ , sy'n ymhlygu bod  $\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$ . Mae amnewid y rhain i mewn i'r hafaliad differol yn rhoi

$$\begin{aligned} x\frac{dv}{dx} + v &= \frac{x^2(3v^2 + 2v)}{x^2(2v + 1)} \\ \therefore x\frac{dv}{dx} &= \frac{3v^2 + 2v}{2v + 1} - v \\ &= \frac{v^2 + v}{2v + 1} \end{aligned}$$

Mae gwahanu'r newidynnau ac integru yn rhoi

$$\begin{aligned} \int \frac{2v + 1}{v^2 + v} dv &= \int \frac{1}{x} dx + A \quad (A \text{ yn gysonyn mympwyol}) \\ \therefore \ln|v^2 + v| &= \ln B|x| \quad (B = e^A) \end{aligned}$$

Amnewidwn  $v = \frac{y}{x}$  ac ad-drefnwn i gael y datrysiaid cyffredinol:

$$|y^2 + xy| = B|x|^3.$$

Mae'r amod ffin  $y(2) = 4$  yn rhoi  $16 + 8 = 8B \Rightarrow B = 3$ . Felly'r datrysiaid neilltuol yw

$$|y^2 + xy| = |3x^3|.$$

3a) Boed i  $x = u + x_0$  ac  $y = v + y_0$  lle mae  $u$  a  $v$  yn ffwythiannau o  $x$  ac  $x_0, y_0$  yn gysonion i'w pennu. Yna mae  $\frac{dv}{du} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{du} = \frac{dy}{dx}(1) = \frac{dy}{dx}$ , fel bod:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{du} &= \frac{a(u + x_0) + b(v + y_0) + c}{l(u + x_0) + m(v + y_0) + n} \\ &= \frac{au + bv + (ax_0 + by_0 + c)}{lu + mv + (lx_0 + my_0 + n)} \end{aligned}$$

Bydd yr hafaliad differol yma yn homogenaidd os bydd:

$$ax_0 + by_0 + c = 0 \tag{1}$$

$$lx_0 + my_0 + n = 0 \tag{2}$$

Mae newid hafaliad (2) yn  $a \times (2) - l \times (1)$  yn rhoi'r system gywerth:

$$ax_0 + by_0 = -c \tag{3}$$

$$(am - bl)y_0 = cl - an \tag{4}$$

Mae gan y system o hafaliadau uchod ddatrysiad gan fod  $am - bl \neq 0$ . Felly gallwn ddarganfod  $x_0$  ac  $y_0$  fel bod yr hafaliad differol gwreiddiol yn newid yn yr hafaliad homogenaidd:

$$\frac{dv}{du} = \frac{au + bv}{lu + mv}.$$

3b) Boed i  $u = lx + my + n$ . Yna mae

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= l + m \frac{dy}{dx} = l + \frac{m(ax + by + c)}{lx + my + n} \\ &= l + \frac{amx + bmy + cm}{u} = l + \frac{blx + bmy + cm}{u} \quad (\text{gan fod } am = bl) \\ &= l + \frac{b(lx + my) + cm}{u} = l + \frac{b(u - n) + cm}{u} \end{aligned}$$

Felly, rydym wedi newid yr hafaliad gwreiddiol yn yr hafliad differol canlynol gyda newidynnau y gallwn eu gwahanu

$$\frac{du}{dx} = F(u)$$

lle  $F(u) = \frac{(b+l)u+cm-bn}{u}$ .

3ci) Mae angen inni ddarganfod datrysiad cyffredinol yr hafaliad differol

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 2}{x - y + 2}.$$

Nodwch ei fod o'r ffurf

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{lx + my + n}$$

lle  $am - bl = -2 \neq 0$ . Felly, trwy 3a), gallwn newid yr hafaliad differol yn hafaliad differol homogenaidd trefn un trwy adael i  $x = u + x_0$  ac  $y = v + y_0$  ar gyfer cysonion priodol  $x_0$  ac  $y_0$ . Nawr mae

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du} = \frac{u + v + x_0 + y_0 + 2}{u - v + x_0 - y_0 + 2}.$$

Dewiswch  $x_0$  ac  $y_0$  fel eu bod yn bodloni

$$\begin{aligned} x_0 + y_0 + 2 &= 0 \\ x_0 - y_0 + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Hynny yw, dewiswch  $x_0 = -2$  ac  $y_0 = 0$ . Yna mae

$$\frac{dv}{du} = \frac{u + v}{u - v}$$

Mae hwn yn hafaliad differol homogenaidd trefn un, felly boed i  $v = wu$ , sy'n ymhlygu bod  $\frac{dv}{du} = u \frac{dw}{du} + w$ . Mae annewid y rhain i mewn i'r hafaliad differol yn rhoi

$$\begin{aligned} u \frac{dw}{du} + w &= \frac{u(1+w)}{u(1-w)} \\ \therefore u \frac{dw}{du} &= \frac{1+w}{1-w} - w \\ &= \frac{1+w^2}{1-w} \end{aligned}$$

Mae gwahanu'r newdiynnau ac integru yn rhoi

$$\int \frac{1-w}{1+w^2} dw = \int \frac{1}{u} du + A \quad (A \text{ yn gysonyn mympwyol})$$
$$\therefore \int \frac{1}{1+w^2} dw - \frac{1}{2} \int \frac{2w}{1+w^2} dw = \ln B|u| \quad (B = e^A)$$
$$\therefore \tan^{-1} w - \frac{1}{2} \ln(1+w^2) = \ln B|u|$$

Mae amnewid  $w = \frac{v}{u}$  ac ad-drefnu yn rhoi

$$\tan^{-1} \left( \frac{v}{u} \right) = \ln \left[ B(v^2 + u^2)^{\frac{1}{2}} \right].$$

Mae amnewid  $v = y$  ac  $u = x + 2$  yn rhoi'r datrysiad cyffredinol:

$$\tan^{-1} \left( \frac{y}{x+2} \right) = \ln \left[ B(y^2 + (x+2)^2)^{\frac{1}{2}} \right].$$

3cii) Yn gyntaf, nodwn fod yr hafaliad differol o'r ffurf

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{lx + my + n}$$

Ile mae  $a = b = -2, c = 6, l = m = 2, n = 5$ . Ymhellach i hyn, rydym yn gweld bod  $am = 4 = bl$ . Felly, o 3b) gwelwn y gallwn newid yr hafaliad differol yn un lle y gallwn gwahanu'r newidynnau, trwy adael i  $u = 2x + 2y + 5$  :

$$\frac{du}{dx} = \frac{(b+l)u + cm - bn}{u} = \frac{22}{u}$$

Mae gwahanu'r newidynnau ac integru yn rhoi:

$$\int u du = \int 22 dx + A \quad (A \text{ yn gysonyn mympwyol})$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2} u^2 = 22x + A$$
$$\Rightarrow (2x + 2y + 5)^2 = 44x + 2A \quad (\text{gan fod } u = 2x + 2y + 5)$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy - 6x + 5y = B \quad \text{lle mae } B \text{ yn gysonyn mympwyol.}$$

4a) Mae angen inni ddarganfod datrysiad cyffredinol yr hafaliad differol llinol, trefn un:

$$\frac{dy}{dx} + 3y = 6.$$

Y ffactor integru yw  $e^{\int 3 dx} = e^{3x}$ . Mae llusio'r hafaliad â'r ffactor integru yn rhoi

$$\frac{d}{dx} \{ e^{3x} y \} = 6e^{3x}.$$

Mae integru yn rhoi

$$e^{3x}y = 2e^{3x} + A \quad (A \text{ yn gysonyn mympwyol}).$$

Felly'r datrysiad cyffredinol yw

$$y = 2 + Ae^{-3x}.$$

4b) Mae angen inni ddarganfod datrysiad cyffredinol yr hafaliad differol llinol, trefn un:

$$\frac{dx}{dt} - \frac{2x}{t} = 2t^3 + 4t^2e^{4t}.$$

Y ffactor integru yw  $e^{\int -\frac{2}{t} dx} = \frac{1}{t^2}$ . Mae llusoi'r hafaliad â'r ffactor integru yn rhoi

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{t^2} x \right\} = 2t + 4e^{4t}.$$

Mae integru yn rhoi

$$\frac{x}{t^2} = t^2 + e^{4t} + A \quad (A \text{ yn gysonyn mympwyol}).$$

Felly'r datrysiad cyffredinol yw

$$x = t^4 + (e^{4t} + A)t^2.$$

4c) Yn gyntaf mae angen inni ddarganfod datrysiad cyffredinol yr hafaliad differol llinol, trefn un  $\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$ , a chwedyn cymhwyso'r amod ffin  $y(0) = 1$ . Y ffactor integru yw  $e^{\int 1 dx} = e^x$ . Mae llusoi'r hafaliad â'r ffactor integru yn rhoi

$$\frac{d}{dx} \{e^x y\} = 1.$$

Felly  $e^x y = x + A$  ( $A$  yn gysonyn mympwyol), a felly  $y = xe^{-x} + Ae^{-x}$ . Nawr yr ydym yn cymhwyso'r amod ffin i ddarganfod gwerth y cysonyn  $A$  (a oedd yn fympwyol hyd yn hyn):

$$0e^0 + Ae^0 = A = 1.$$

Felly y datrysiad neilltuol yw

$$y = (x + 1)e^{-x}.$$

4d) Yn gyntaf mae angen inni ddarganfod datrysiad cyffredinol yr hafaliad differol llinol, trefn un  $x\frac{dy}{dx} + 2y = 10x^2$ , a chwedyn cymhwyso'r amod ffin  $y(1) = 3$ . Dechreuwn trwy rannu drwodd ag  $x$  i droi'r hafaliad yn ffurf safonol:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = 10x.$$

Yna lluoswn drwodd â ffactor integru  $e^{\int \frac{2}{x} dx} = x^2$ , sy'n rhoi

$$x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy = 10x^3.$$

Gallwn ysgrifennu hwn fel

$$\frac{d}{dx} \{x^2y\} = 10x^3.$$

Mae integru mewn perthynas ag  $x$  yn rhoi  $x^2y = \frac{5}{2}x^4 + A$  lle mae  $A$  yn gysonyn mympwyol. Mae ad-drefnu yn rhoi'r datrysiad echblyg

$$y = \frac{5}{2}x^2 + Ax^{-2}.$$

Nawr cymhwyswn yr amod ffin, sy'n dweud y bydd  $y = 3$  pan fydd  $x = 1$ . Felly

$$3 = \frac{5}{2} + A,$$

sy'n rhoi  $A = \frac{1}{2}$ . Mae'n dilyn mai

$$y = \frac{1}{2}(5x^2 + x^{-2})$$

yw'r datrysiad neilltuol.