

**ADRAN MATHEMATEG / DEPARTMENT OF MATHEMATICS**

**ARHOLIADAU SEMESTER 2 / SEMESTER 2 EXAMINATIONS**

**MAI – MEHEFIN / MAY – JUNE 2025**

**MT11210 – Hafaliadau Differol**

Mae'r cwestiynau ar y papur hwn yn ymddangos yn Gymraeg yn gyntaf. Mae fersiwn Saesneg o'r papur yn dilyn.

**Amser a ganiateir - 2 awr**

**Time allowed - 2 hours**

- Rhoddir marciau llawn am atebion cyflawn i bob cwestiwn yn Rhan A ac i dri cwestiwn yn Rhan B.
- Yn Rhan B, rhoddir credyd am y tri ateb gorau.
- Ni cheir defnyddio cyfrifianellau.
- Mae modd i fyfyrwyr gyflwyno atebion i'r papur hwn naill ai yn y Gymraeg neu'r Saesneg.
- Full marks will be given for complete answers to all questions in Section A and to three questions in Section B.
- In Section B, credit will be given for the best three answers.
- Calculators are not permitted.
- Students may submit answers to this paper in either Welsh or English.

**Rhan A**

1. Ysgrifennwch drefn a gradd yr hafaliadau differol canlynol gan nodi p'un ai ydynt yn llinol ai peidio:

(a)  $\frac{dy}{dx} = \cos x;$

(b)  $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3y = \cos x;$

(c)  $\frac{d^3y}{dt^3} + t^3 \frac{dy}{dt} - \sin t = 0;$

(d)  $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \frac{dy}{dx} = y^2 \sin x;$

(e)  $\frac{dy}{dx} + 3xy = \frac{x^4 \sin y}{1 + x^2}.$

[5 marc]

2. Darganfyddwch y datrysiad i'r hafaliad differol canlynol sy'n bodloni  $y(0) = 2$ :

$$\frac{dy}{dx} = 2 + \cos x.$$

[5 marc]

3. Datryswch yr hafaliad differol llinol, trefn un canlynol o wybod fod  $y(2) = 5$ :

$$\frac{dy}{dx} + \frac{3}{x}y = 5x.$$

[5 marc]

4. Darganfyddwch ddatrysiad neilltuol echblyg yr hafaliad differol canlynol sy'n bodloni'r amod  $y(0) = 0$ :

$$\frac{dy}{dx} = 2xe^{-y}.$$

[5 marc]

5. Dangoswch fod yr hafaliad differol canlynol yn homogenaidd a darganfyddwch ei ddatrysiad cyffredinol:

$$4xy^2 \frac{dy}{dx} = x^3 + y^3.$$

[5 marc]

6. Darganfyddwch ddatrysiad cyffredinol yr hafaliad differol trefn dau canlynol:

$$y'' - 6y' + 9y = 27x.$$

[5 marc]

7. Darganfyddwch ddatrysiad cyffredinol yr hafaliad Bernoulli canlynol:

$$\frac{dy}{dx} = 4y - 4xy^3.$$

[5 marc]

8. Darganfyddwch y datrysiad i'r hafaliad differol canlynol sy'n bodloni'r amodau cychwynnol penodol:

$$\ddot{x} + 9x = 10e^t; \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

[5 marc]

## Rhan B

9. Darganfyddwch ddatrysiadau cyffredinol yr hafaliadau differol isod:

$$(a) \quad y'' - 2y' - 3y = 18e^{2x} + 6x^2 + 8x + 2; \quad [10 \text{ marc}]$$

$$(b) \quad y'' - 4y' + 4y = 6e^{2x} + 8. \quad [10 \text{ marc}]$$

10. Gan egluro eich gwaith cyfrifo yn glir, defnyddiwch dull amrywiad paramedrau Lagrange er mwyn darganfod datrysiad cyffredinol yr hafaliad differol canlynol:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}. \quad [20 \text{ marc}]$$

11. Darganfyddwch ddatrysiad cyffredinol ymhlyg yr hafaliadau differol canlynol:

$$(a) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 2}{x - y + 4}; \quad (b) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 2}{x + y + 4}. \quad [12,8 \text{ marc}]$$

12. Yn y siop anifeiliaid anwes “*Wheely Good Pets*” (ar agor 7 diwrnod yr wythnos ar gyfer eich holl anghenion anwes), mae poblogaeth o fochewdion yn tyfu ar gyfradd mewn cyfrannedd â'i phoblogaeth bresennol. Yn absenoldeb unrhyw ymyrraeth, mae maint y boblogaeth yn dyblu bob wythnos. Yn wreiddiol, mae 300 o fochdewion. Fodd bynnag, oherwydd eu hymgyrch farchnata “*Squeak Squad: Tiny Paws, Huge Hearts!*”, mae 20 bochdew yn cael eu mabwysiadu bob dydd.

(a) Ffurfiwch a datrysych hafaliad differol sy'n pennu nifer y bochdewion fel ffwythiant o amser (mewn wythnosau). [12 marc]

(b) Disgrifiwch ymddygiad tymor hir maint poblogaeth y bochdewion. Efallai y bydd y ffaith bod  $e^{0.7} \approx 2$  yn ddefnyddiol. [3 marc]

(c) Deilliwch fynegiad ar gyfer nifer lleiaf y bochdewion sy'n rhaid eu mabwysiadu bob dydd i sicrhau bod y siop anifeiliaid yn rhedeg allan o fochdewion yn y pen draw. [5 marc]

13. Mae gan “*Cymysgfa Cymreig Cenfyn*”, bar coctel Aberystwyth, bowlen fawr o bwsh sy'n dal 1000 litr o bwsh ffrwythau gyda chrynodiad anhysbys o siwgr. Yn ei arbrofion diweddar i greu'r diodydd perffaith, mae Cenfyn yn dechrau pwmpio cymysgedd arbennig ar gyfradd o 8 litr y funud; mae'r hylif sy'n dod i mewn yn cynnwys 100 gram o siwgr y litr. Er mwyn osgoi llanast, caiff y pwsh sydd wedi'i ysgwyd yn dda ei ddraenio ar yr un gyfradd, gyda'r hylif sy'n mynd allan yn cael ei rewi i wneud lolipops rhew melys.

(a) Ffurfiwch a datrysych hafaliad differol sy'n pennu'r swm o siwgr yn y bowlen bwsh ar amser  $t$ . Rhowch ystyr ffisegol i unrhyw gysonion mympwyol yn eich ateb. [8 marc]

(b) Ar ôl amser hir, faint o siwgr sydd yn y bowlen bwsh? A yw'r gwerth hwn yn dibynnu ar y swm oedd yn bresennol yn gychwynnol? [2 marc]

(c) Mae'r cymysgedd sy'n rhedeg allan, gyda thymheredd cychwynnol o  $20^\circ\text{C}$ , yn cael ei arllwys i mewn i fowldiau sy'n cael eu gosod mewn rhewgell sy'n cynnal tymheredd amgylchol sefydlog o  $-20^\circ\text{C}$ . Ar ôl 5 munud yn y rhewgell, mae tymheredd y cymysgedd yn  $5^\circ\text{C}$ . Defnyddiwch Deddf Oeri Newton i benderfynu pa mor hir mae'n cymryd i'r cymysgedd gyrraedd y tymheredd  $-10^\circ\text{C}$ .

Awgrym: Efallai bod  $\ln 2 / (\ln 8 - \ln 5) \approx 1.47$  yn ddefnyddiol. [10 marc]