

**ADRAN MATHEMATEG / DEPARTMENT OF MATHEMATICS**

**ARHOLIADAU SEMESTER 2 / SEMESTER 2 EXAMINATIONS**

**MAI – MEHEFIN / MAY – JUNE 2023**

**MT11210 - Hafaliadau Differol**

Mae'r cwestiynau ar y papur hwn yn ymddangos yn Gymraeg yn gyntaf. Mae fersiwn Saesneg o'r papur yn dilyn.

**Amser a ganiateir - 2 awr**

**Time allowed - 2 hours**

- Rhoddir marciau llawn am atebion cyflawn i bob cwestiwn yn Rhan A ac i dri cwestiwn yn Rhan B.
- Yn Rhan B, rhoddir credyd am y tri ateb gorau.
- Ni cheir defnyddio cyfrifianellau.
- Mae modd i fyfyrwyr gyflwyno atebion i'r papur hwn naill ai yn y Gymraeg neu'r Saesneg.
- Full marks will be given for complete answers to all questions in Section A and to three questions in Section B.
- In Section B, credit will be given for the best three answers.
- Calculators are not permitted.
- Students may submit answers to this paper in either Welsh or English.

Ar ôl eistedd, gall myfyrwyr lenwi tudalen flaen y llyfryn atebion a'r papur presenoldeb.

Once seated, students may complete the front cover of the answer book and the attendance slip.

**Peidiwch ag agor y papur arholiad tan y dywedir wrthyich am wneud hynny.**

**Do not open the question paper until instructed to do so.**

**Rhan A**

1. Ysgrifennwch drefn a gradd yr hafaliadau differol canlynol gan nodi p'un ai ydynt yn llinol ai peidio:

(a)  $\frac{dy}{dx} + 6y = x^3;$

(b)  $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} = \sin x;$

(c)  $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + 5x\left(\frac{dy}{dx}\right)^6 = 7;$

(d)  $\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^3 = y^2;$

(e)  $x^3\frac{dy}{dx} = 1.$

[5 marc]

2. Darganfyddwch y datrysiad i'r hafaliad differol canlynol sy'n bodloni  $y(0) = 1$ :

$$\frac{dy}{dx} = \cos(5x) + 9x^2 + 5.$$

[5 marc]

3. Datryswch yr hafaliad differol llinol, trefn un canlynol o wybod fod  $y(\pi) = 1$ :

$$\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = x^4 \cos(2x).$$

[5 marc]

4. Darganfyddwch ddatrysiad neilltuol echblyg yr hafaliad differol canlynol sy'n bodloni'r amod  $y(0) = 1$ :

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2.$$

[5 marc]

5. Dangoswch fod yr hafaliad differol canlynol yn homogenaidd a darganfyddwch ei ddatrysiad neilltuol echblyg sy'n bodloni  $y(1) = 1$ :

$$x^2\frac{dy}{dx} = xy + y^2.$$

[5 marc]

6. Darganfyddwch ddatrysiad cyffredinol yr hafaliad differol trefn dau canlynol:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} - 7y = 12e^x.$$

[5 marc]

7. Darganfyddwch y datrysiad i'r hafaliad differol canlynol sy'n bodloni'r amodau cychwynnol penodol:

$$\ddot{x} + 2x = 10t^2; \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

[5 marc]

8. Darganfyddwch ddatrysiad cyffredinol echblyg yr hafaliad Bernoulli canlynol:

$$x^3\frac{dy}{dx} = y(x^2 + y).$$

[5 marc]

**Rhan B**

9. Darganfyddwch ddatrysiadau cyffredinol yr hafaliadau differol isod:

(a)  $y'' + 5y' - 24y = 22e^{3x}$ ; [8 marc]

(b)  $y'' - 4y' + 5y = 10e^x \sin(x) + 125x$ . [12 marc]

10. Gan ddefnyddio'r amnewidiad  $x = e^t$  neu fel arall, darganfyddwch y datrysiad i'r hafaliad

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3x \frac{dy}{dx} + 4y = 4 \ln x, \quad x > 0,$$

sy'n bodloni'r amodau  $y(1) = 0$  ac  $y'(1) = 1$ . [20 marc]

11. (a) (i) Ystyriwch hafaliadau differol ar ffurf:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{lx + my + n},$$

Ile mae  $a, b, c, l, m, n$  yn gysonion hysbys. Darganfyddwch gysonion  $x_0$  ac  $y_0$  fel bod y newid newidynnau  $x = u + x_0$  ac  $y = v + y_0$  yn gostwng yr hafaliad differol i un o fath homogenaidd. Nodwch yn glir unrhyw dybiaethau rydych wedi gwneud am werthoedd  $a, b, c, l, m, n$ . [5 marc]

(ii) Trwy hyn neu fel arall, darganfyddwch y datrysiad cyffredinol i'r hafaliad differol canlynol:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 1}{x - y + 1}.$$

[10 marc]

(b) Ystyriwch yr hafaliad differol

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{3 - x - y}.$$

Eglurwch yn fyr pam nad yw'r dull a ddisgrifir yn (a) yn addas i ddatrys yr hafaliad hwn. Gan ddefnyddio'r newid newidynnau  $u = x + y$  neu fel arall, darganfyddwch ei ddatrysiad cyffredinol. [5 marc]

12. Datgana deddf oeri Newton bod cyfradd newid tymheredd corff mewn cyfrannedd union â'r gwahaniaeth mewn tymheredd rhwng y corff a'i amgylchoedd.

Mae Siw Fflei, prif gogydd bwyty yn Aberystwyth, yn paratoi cawl ar gyfer parti diwedd tymor mawr o fyfyrwyr mathemateg. Ar yr ennyd mae'r cawl yn gadael y gegin, mae ganddo dymheredd cychwynnol  $T_0$ , tra bod gan y bwyty dymheredd amgylchol  $T_A$ .

- (a) Ysgrifennwch hafaliad differol ar gyfer tymheredd  $T$  (fel ffwythiant o amser  $t$ ) y cawl, ynghyd ag amod cychwynnol. [4 marc]
- (b) Defnyddiwch ddull priodol er mwyn darganfod y datrysiad neilltuol echblyg i'r hafaliad differol hwn, sydd dal yn cynnwys un cysonyn anhysbys (ystyriwch  $T_0$  a  $T_A$  fel cysonion hysbys) yn eich datrysiad. A fydddech chi'n disgwyl i'r cysonyn anhysbys fod yn bositif neu'n negatif? Pam? [8 marc]
- (c) Tybiwch mai tymheredd cychwynnol y cawl oedd  $90^\circ\text{C}$ , tra  $20^\circ\text{C}$  yw tymheredd y bwyty. O'i phrofiad helaeth yn y gorffennol, mae'r cogydd yn gwybod bod cawl yn oeri i  $80^\circ\text{C}$  mewn 30 eiliad.

Yn syth ar ôl gadael y gegin, mae sylw y weinyddes yn cael ei thynnu gan fathemategydd hynod allblyg sy'n cychwyn sgwrs hir a hynod ddiddorol gyda hi am hafaliadau differol.

Darganfyddwch pa mor hir y gall hi sgwrsio (i'r eiliad agosaf) cyn i'r cawl gyrraedd y tymheredd gweini anfodhaol o  $50^\circ\text{C}$ . [8 marc]

[Efallai bydd y ffaith bod  $\frac{\ln 7 - \ln 3}{\ln 7 - \ln 6} \approx 5.50$  yn ddefnyddiol i chi.]

13. Mae poblogaeth o locustiaid mewn ardal penodol yn cynyddu ar gyfradd sy'n gyfrannol â maint y boblogaeth bresennol. Yn absenoldeb ffactorau eraill (fel ysglyfaethu) byddai'r boblogaeth yn dyblu bob wythnos. I ddechrau, mae'r ardal yn cynnwys 500,000 o locustiaid. Mae ysglyfaethwyr fel adar a chnofilod yn bwyta nifer cyson,  $p$  dyweder, o locustiaid yr wythnos.

- (a) Darganfyddwch boblogaeth y locustiaid ar unrhyw adeg. [12 marc]
- (b) Beth yw isafswm gwerth  $p$  fel bod y boblogaeth o locustiaid yn marw allan yn y pen draw? Cyn belled â bod  $p$  yn fwy na'r gwerth hwn, nodwch yr amser y mae'n ei gymryd i'r boblogaeth farw allan yn nhermau  $p$ . [8 marc]

**DIWEDD Y PAPUR**