

ADRAN MATHEMATEG / DEPARTMENT OF MATHEMATICS

ARHOLIADAU SEMESTER 2 / SEMESTER 2 EXAMINATIONS

MAI / MAY 2022

MT11210 - Hafaliadau Differol

Mae'r cwestiynau ar y papur hwn wedi cael eu hysgrifennu yn y Gymraeg.

Amser a ganiateir - 2 awr

Time allowed - 2 hours

- Rhoddir marciau llawn am atebion cyflawn i bob cwestiwn yn Rhan A ac i dri cwestiwn yn Rhan B.
- Yn Rhan B, rhoddir credyd am y tri ateb gorau.
- Ni cheir defnyddio cyfrifianellau.
- Mae modd i fyfyrwyr gyflwyno atebion i'r papur hwn naill ai yn y Gymraeg neu'r Saesneg.
- Full marks will be given for complete answers to all questions in Section A and to three questions in Section B.
- In Section B, credit will be given for the best three answers.
- Calculators are not permitted.
- Students may submit answers to this paper in either Welsh or English.

Rhan A

1. Ysgrifennwch drefn a gradd yr hafaliadau differol canlynol gan nodi p'un ai ydynt yn llinol ai peidio:

(a) $\frac{dy}{dx} + 6y = x^3;$

(b) $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} = \sin x;$

(c) $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + 5x\left(\frac{dy}{dx}\right)^6 = 7;$

(d) $\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^3 = y^2;$

(e) $\sin x \frac{dy}{dx} - e^x \frac{d^5y}{dx^5} = 0.$

[5 marc]

2. Darganfyddwch y datrysiad i'r hafaliad differol canlynol sy'n bodloni $y(0) = 7$:

$$\frac{dy}{dx} = \cos(2x) + 6x^2 + 1.$$

[5 marc]

3. Darganfyddwch ddatrysiad cyffredinol echblyg yr hafaliad differol llinol, trefn un canlynol:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y = x^3 \cos 3x + 4x^3 e^{-x}.$$

[5 marc]

4. Darganfyddwch ddatrysiad cyffredinol echblyg yr hafaliad differol canlynol:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(y+1)}{x}.$$

[5 marc]

5. Dangoswch fod yr hafaliad differol canlynol yn homogenaidd a darganfyddwch ei ddatrysiad cyffredinol:

$$xy \frac{dy}{dx} = y^2 - x^2.$$

[5 marc]

6. Darganfyddwch ddatrysiad cyffredinol yr hafaliad differol trefn dau canlynol:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} - 7y = 21 - 2x - 7x^2.$$

[5 marc]

7. Darganfyddwch ddatrysiad neilltuol echblyg yr hafaliad Bernoulli canlynol sy'n bodloni'r amod $y(1) = 1$:

$$x \frac{dy}{dx} + y = y^2 x^2 \ln x.$$

Awgrym: gellir integru $\ln x$ fesul rhan.

[5 marc]

8. Darganfyddwch y datrysiad i'r hafaliad differol canlynol sy'n bodloni'r amodau cychwynnol penodol:

$$\ddot{x} + x = e^t; \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 1.$$

[5 marc]

Rhan B

9. Darganfyddwch ddatrysiadau cyffredinol yr hafaliadau differol isod:

(a) $y'' + 2y' - 24y = 8 + 48x + 20e^{4x}$; [8 marc]

(b) $y'' - 2y' + 10y = 1 + e^x \sin(3x)$. [12 marc]

10. (a) Gan ddefnyddio'r amnewidiad $u = x^2 \operatorname{cosec}(x)y$ neu fel arall, darganfyddwch ddatrysiad neilltuol echblyg yr hafaliad differol cyffredin canlynol sy'n bodloni $y(\pi/2) = 1$:

$$x^2 \frac{dy}{dx} = \sin^2 x + (x^2 \cot x - 2x)y.$$

[8 marc]

(b) Gan ddefnyddio'r amnewidiadau $v = y - 5$ ac $u = x + 1$, darganfyddwch ddatrysiad cyffredinol echblyg yr hafaliad differol canlynol

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy - 8y - 10x + 15}{x^2 + 2x + 1}.$$

[12 marc]

11. Gan egluro eich gwaith cyfrifo yn glir, defnyddiwch ddull Lagrange o amrywio'r paramedrau er mwyn darganfod ddatrysiad cyffredinol

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = e^x \ln x.$$

[20 marc]

12. Datgana deddf oeri Newton bod cyfradd newid tymheredd corff mewn cyfrannedd union â'r gwahaniaeth mewn tymheredd rhwng y corff a'r amgylchedd.

Ar ôl iddi fachlud ar noson glaer (tymheredd 10°C) ym mis Mai ar y traeth ger y coelcerth, mae banana gyda siocled a malws melys yn cael ei lapio mewn ffoil tun a'i roi yn y tân, gyda'r bwriad o bobî'r banana a thoddi'r siocled a'r malws melys.

Pan mae'n cael ei godi o'r tân, tymheredd y pecyn banana yw 210°C .

(a) Ysgrifennwch hafaliad differol ar gyfer tymheredd T (fel ffwythiant o amser t) y banana, ynghyd ag amod cychwynnol. [4 marc]

(b) Defnyddiwch ddull priodol er mwyn darganfod y datrysiad neilltuol echblyg i'r hafaliad differol hwn, sydd dal yn cynnwys un cysonyn anhysbys. [8 marc]

(c) Un munud ar ôl ei dynnu o'r barbeciw, mae'r banana wedi oeri i 130°C . Darganfyddwch, mewn munudau (i ddau le degol), pa mor hir ar ôl ei dynnu o'r tân fydd y banana wedi'i oeri i dymheredd cyfforddurs i'w fwyta, sef 60°C . [8 marc]

[Efallai bydd y faith bod $\frac{\ln 2}{\ln 5 - \ln 3} \approx 1.36$ yn ddefnyddiol.]

13. Darganfyddir mai $0.97 \text{ mg}/\ell$ yw crynodiad clorin mewn pwll nofio $600,000 \ell$, sy'n is na'r trothwy diogelwch o $1 \text{ mg}/\ell$. Er mwyn sicrhau bod y pwll yn ddiogel i'w ddefnyddio, mae cymysgedd $2 \text{ mg}/\ell$ o glorin mewn dŵr yn cael ei bwmpio i mewn i'r pwll ar gyfradd o 30ℓ y munud, ac mae'r cymysgedd yn y pwll yn cael ei bwmpio allan ar yr un gyfradd. Tybiwch fod y clorin yn cymysgu'n syth gyda'r dŵr.

- (a) Ysgrifennwch hafliad differol sy'n modelu maint y clorin, q , yn y pwll ar amser t . [4 marc]
- (b) Darganfyddwch fynegiad ar gyfer q fel fffwythiant o t . [8 marc]
- (c) Pa mor hir y mae'n rhaid ei gymryd cyn bod y pwll yn ddiogel i'w ddefnyddio?
(Gallwch adael eich ateb ar ffurf union; does dim angen enrhifo'ch ateb yn rhifiadol.) [5 marc]
- (d) Gan dybio bod y system yn parhau fel y disgrifir uchod, darganfyddwch y maint mwyaf posib o glorin a all fod yn y pwll ar unrhyw adeg. [3 marc]